区間ベイズ手法による不適合品の事前検出 (不確実性下における意思決定問題)

佐々木, 稔; 堀口, 正之

数理解析研究所講究録
第1734巻 2011年 156-163

区間ベイズ手法による不適合品の事前検出 (The prior detection before the occurrence of a nonconforming product by interval Bayesian method)

日本化学工業株式会社・生産技術部　佐々木　稔 (Minoru SASAKI)
Department of Industrial Technology,
NIPPON CHEMICAL INDUSTRIAL CO., LTD.
神奈川大学・工学部　堀口　正之 (Masayuki HORIGUCHI)
Faculty of Engineering, Kanagawa University

1　はじめに

統計的方法を用いた品質管理をはじめて提唱したのはW.A.シューハート (1931) である. その方法は管理図法と呼ばれ, 現在の管理図の原型として知られる. 対象とする観測データからのプロットにより, 製品の品質のバラつきが容認できる範囲のものであるか否かを, 中心線からの上下の管理限界線の範囲内にあるか否か, さらに範囲内でのプロットの傾向によって判断して品質管理を行う.

ベイズ推定を用いた適応型の品質管理については, 多くの研究があり品質管理の現場でのその有効性が報告されている (cf.[2, 6, 10, 17]). 蓄積された情報を基にして, 管理限界, サンプルサイズおよびサンプリング間隔を変更して事象や状況の変化に適応していく (cf. [10]). また, 適応型の品質管理の問題を未知パラメータをもつ逐次決定過程として定式化し, 動的計画法 (Dynamic Programming) によって最適な管理政策を求める研究も行われている (cf. [1, 4, 5, 8, 9, 11, 12]).

ベイズ流の方法では, 未知パラメータへの事前情報や知識を1つの事前分布で表現する必要がある (cf. [19, 21, 23]). しかし, 事前知識を漠然として1つの事前分布によって考えることは実際の適用場面において困難であることがある. また, 事前情報から事前分布を推定あるいは構成するとき, その間の食い違いによる大きな推定誤差を引き起こすことがある. これらの困難を克服する方法として L. De Robertis と J. A. Hartigan は, 区間ベイズ法の考えを提唱している ([3]). これは, 未知パラメータに対する事前知識を測度による区間 (intervals of measures) で表そうとするものである. 我々は, 先行研究として, 区間ベイズ法を母平均が未知 (分散は既知) の正規母集団の品質管理に適用し, 事前情報に対する頑健な適応型の品質管理法を提案した. また, 区間ベイズ法を用いた適応型の管理図では事前情報としてどの範囲の知識を前提としているかなども検討した ([18]).

品質管理では, 製造工程で発生する不適合品を後工程へ流したり出荷したりすることを阻止することが重要である. 工程内検査や出荷検査を行うことで, 不適合品の後工程等への流出を防止している. しかしながら, 通常, 全品検査は出来ないことが多く, 検査での不適合品流出の防止には限界がある. 不適合品の発生を未然に防ぐように製造工程を適切に管理することが品質管理の目標の一つであり, 品質は工程で作り込まなければならない. そこで, 製造現場では製造工程の管理のために管理図が利用されている. 管理図には, 管理限界線が引かれており, この管理限界線を超えた製造品は不適合品と判断するこ

とができる (管理限界線を規格値とした場合). さらに言うと, 管理限界線を超えてしまった製造品は既に不適合品であり, 事前に不適合品を検出した訳ではない.

また, 管理図法では, 製造工程の状態を監視するための異常判定ルール (JIS Z 9021) がある. 例えば, 異常判定ルール3は, プロットされた6点が連続して増加 (減少) していることを "異常" としている. しかし, この異常判定ルール (ルール3以外も同様) は, 製造工程の異常を感知するためのものであって, 将来の不適合品を事前に検出するためのものではない. 今の例で, 増加傾向が連続6点並ぶ前に管理限界線を超えてしまう場合には不適合品の発生を事前検出 (予測) 出来ない.

そこで、我々は不適合品の発生の予測をベイズ的手法によって行い, 区間ベイズ法による不適合品の事前検出について考察した. 本報告では, 品質管理の問題として, 製品の特性値 $X = x$ のデータ観測に基づく適合 $(X < a_0)$ と不適合 $(X \geqq a_0)$ の判定について, 区間ベイズ手法を用いた確率の推定による不適合品の事前検出方法を提案する.

2 不適合品の事前検出法

製品の特性値 X は次のような正規モデルに従う.

(1) $$X \sim N(\theta, 1). \quad \theta \in \Theta = (-\infty, \infty).$$

ここで, θ は未知のパラメータを表す. すなわち, X は分散が既知 $(\sigma^2 = 1)$ で平均 θ の正規分布に従う確率変数とする.

このとき, X の確率密度関数は

(2) $$f(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}$$

と表される. 1回の抜き取り検査から, 製品の特性値を表す X の値を確認し,

$$\begin{cases} X < a_0 \text{ ならば適合,} \\ X \geqq a_0 \text{ ならば不適合} \end{cases}$$

と判定する. この抜き取り検査での適合の確率を, $\delta(\theta)$ と表すことにする. すなわち,

(3) $$\delta(\theta) \equiv P(X < a_0|\theta)$$

とする. このとき,

$$\delta(\theta) = P(Z < a_0 - \theta|\theta) = \Psi(a_0 - \theta)$$

が成り立つ. ただし,

$$Z \sim N(0, 1), \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \Psi(t) = \int_{-\infty}^{t} \phi(z)\, dz$$

である. このとき, 不適合の確率 $P(X \geqq a_0|\theta)$ は $1 - \delta(\theta)$ と表せる.

ここでは, 得られた観測値 $X = x$ から区間ベイズ手法用いて適合の確率 $\delta(\theta)$ を推定し, それに基づく不適合の事前検出法を提案する.

Θ の部分集合からなるボレル集合族を $\mathcal{B}$ として, 可測空間 $(\Theta, \mathcal{B})$ 上の σ-有限測度 L, U について, 全ての $A \in \mathcal{B}$ に対して $L(A) \leq U(A)$ が成り立つとき $L \leq U$ と記す. $L \leq U$ のとき, L と U のそれぞれを左端点および右端点にもつ区間 $I(L, U)$ を次で定める.

(4) $$I(L, U) := \{Q \mid L \leq Q \leq U, Q \text{ は } \sigma\text{-有限測度}\}$$

パラメータ θ の事前知識を表す事前測度 Q は, $(\Theta, \mathcal{B})$ 上の σ-有限測度 $L, U (L \leq U)$ の区間 $I(L, U)$ に含まれるとする. すなわち, 次が成り立つとする.

(5) $$Q \in I(L, U)$$

このとき区間 $I(L, U)$ を事前測度区間という. g を $(\Theta, \mathcal{B})$ 上の Q-可積分関数とするとき, 記号の簡単のためにその積分を次のように表す:

$$Q(g) := \int_{\Theta} g(\theta) dQ(\theta)$$

Assumption 1. (正規事前測度区間) θ の事前測度 Q は $I(\mu, \tau)$ に含まれる, すなわち,

(6) $$Q \in I(\mu, \tau)$$

を仮定する. ただし, $I(\mu, \tau)$ は次のような θ に関する区間集合で与えられる.

$$I(\mu, \tau) \equiv \left[\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\tau(\theta-\mu)^2}{2}}, k \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\tau(\theta-\mu)^2}{2}} \right].$$

k は 1 以上の正の定数 ($k \geqq 1$) であり, τ は分散の逆数 precision である.

ここで, De Robertis & Hartigan(1981) の結果をこの正規事前測度区間に適用すると, $Q \in I(\mu, \tau)$ に対する $\delta(\theta)$ のベイズ推定は $\dfrac{Q(\delta(\theta))}{Q(1)}$ であり, 事前測度区間にあるすべての測度 Q に対しては次のような閉区間で表される.

(7) $$\left\{ \frac{Q(\delta(\theta))}{Q(1)} | Q \in I(\mu, \tau) \right\} = \left[\underline{\delta}(\mu, \tau), \overline{\delta}(\mu, \tau) \right].$$

ただし, $\underline{\delta}, \overline{\delta}$ はそれぞれ以下の方程式 (8), (9) の唯一の解として与えられる. $\lambda = \underline{\delta}(\mu, \tau)$ とおくとき λ は

(8) $$k \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(\theta) - \lambda)^{-} e^{-\frac{\tau(\theta-\mu)^2}{2}} d\theta + \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(\theta) - \lambda)^{+} e^{-\frac{\tau(\theta-\mu)^2}{2}} d\theta = 0$$

の解として与えられ, $\lambda = \overline{\delta}(\mu, \tau)$ とおくとき λ は

(9) $$\int_{-\infty}^{\infty} (\delta(\theta) - \lambda)^{-} e^{-\frac{\tau(\theta-\mu)^2}{2}} d\theta + k \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(\theta) - \lambda)^{+} e^{-\frac{\tau(\theta-\mu)^2}{2}} d\theta = 0$$

の解として与えられる. ここで, $x \in \mathbb{R}$ に対して $x^{+} = \max\{x, 0\}, x^{-} = \min\{x, 0\}$ を表す.

データ観測値 $X=x$ による適合の確率 $\delta(\theta)$ の下限値 $\underline{\delta}$ と上限値 $\overline{\delta}$ を得るために，方程式 (8),(9) を具体的に解いていく．次の関数 G を定義する．

(10) $$G(a|a_0,\mu,\tau)=P(Z+Y<a_0,Y<a)\quad(-\infty<a<\infty)$$

ただし，$Z\sim N(0,1), Y\sim N(\mu,\frac{1}{\tau})$ であって Z と Y は独立であるとする．

Proposition 1. $\underline{\delta},\overline{\delta}$ は，それぞれ次の方程式の唯一の解である．$\lambda=\underline{\delta}(\mu,\tau)$ とおくと

(a) $$k\Psi\left(\frac{a_0-\mu}{\sqrt{(\tau+1)/\tau}}\right)-(k-1)G(a_0-\Psi^{-1}(\lambda)|a_0,\mu,\tau)+(k-1)\lambda\Psi(\sqrt{\tau}(a_0-\Psi^{-1}(\lambda)-\mu))-k\lambda=0.$$

$\lambda=\overline{\delta}(\mu,\tau)$ とおくと

(b) $$\Psi\left(\frac{a_0-\mu}{\sqrt{(\tau+1)/\tau}}\right)+(k-1)G(a_0-\Psi^{-1}(\lambda)|a_0,\mu,\tau)-(k-1)\lambda\Psi(\sqrt{\tau}(a_0-\Psi^{-1}(\lambda)-\mu))-\lambda=0.$$

Proof. 式 (8) の両辺に $\dfrac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}}$ をかけて

$$k\int_{-\infty}^{\infty}(\delta(\theta)-\lambda)^{-}\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\tau(\theta-\mu)^2}{2}}\,d\theta+\int_{-\infty}^{\infty}(\delta(\theta)-\lambda)^{+}\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\tau(\theta-\mu)^2}{2}}\,d\theta=0$$

として，$\delta(\theta)=\Psi(a_0-\theta)<\lambda$ を $\theta>a_0-\Psi^{-1}(\lambda)$ と書き換えると，

$$k\int_{a_0-\Psi^{-1}(\lambda)}^{\infty}(\delta(\theta)-\lambda)\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\tau(\theta-\mu)^2}{2}}\,d\theta+\int_{-\infty}^{a_0-\Psi^{-1}(\lambda)}(\delta(\theta)-\lambda)\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\tau(\theta-\mu)^2}{2}}\,d\theta=0$$

と表すことができる．この式を書き下していくと，

(11) $$k\int_{a_0-\Psi^{-1}(\lambda)}^{\infty}\Psi(a_0-\theta)\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\tau(\theta-\mu)^2}{2}}\,d\theta-k\lambda\int_{a_0-\Psi^{-1}(\lambda)}^{\infty}\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\tau(\theta-\mu)^2}{2}}\,d\theta+\int_{-\infty}^{a_0-\Psi^{-1}(\lambda)}\Psi(a_0-\theta)\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\tau(\theta-\mu)^2}{2}}\,d\theta-\lambda\int_{-\infty}^{a_0-\Psi^{-1}(\lambda)}\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\tau(\theta-\mu)^2}{2}}\,d\theta=0.$$

ここで，左辺第 3 項は

$$\int_{-\infty}^{a_0-\Psi^{-1}(\lambda)}\Psi(a_0-\theta)\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\tau(\theta-\mu)^2}{2}}\,d\theta=G(a_0-\Psi^{-1}(\lambda)|a_0,\mu,\tau),$$

と表される．また，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(a_0-\theta)\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\tau(\theta-\mu)^2}{2}}\,d\theta=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz\right)\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\tau(\theta-\mu)^2}{2}}\,d\theta$$
$$=P(Z+Y<a_0)$$
$$=P\left(Z<\frac{a_0-\mu}{\sqrt{(\tau+1)/\tau}}\right)\quad\left(\because Z+Y\sim N(\mu,\frac{\tau+1}{\tau})\right)$$
$$=\Psi\left(\frac{a_0-\mu}{\sqrt{(\tau+1)/\tau}}\right)$$

と表されるから．左辺第１項の積分部分は

$$\int_{a_0-\Psi^{-1}(\lambda)}^{\infty}\Psi(a_0-\theta)\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\tau(\theta-\mu)^2}{2}}\,d\theta=\Psi\left(\frac{a_0-\mu}{\sqrt{(\tau+1)/\tau}}\right)-G(a_0-\Psi^{-1}(\lambda)|a_0,\mu,\tau)$$

と表される．従って，式 (11) を書き換えると

$$(12)\quad k\left\{\Psi\left(\frac{a_0-\mu}{\sqrt{(\tau+1)/\tau}}\right)-G(a_0-\Psi^{-1}(\lambda)|a_0,\mu,\tau)\right\}$$
$$-k\lambda\left\{1-\Psi(\sqrt{\tau}(a_0-\Psi^{-1}(\lambda)-\mu))\right\}+G(a_0-\Psi^{-1}(\lambda)|a_0,\mu,\tau)$$
$$-\lambda\Psi(\sqrt{\tau}(a_0-\Psi^{-1}(\lambda)-\mu))=0$$

を得る．整理して，

$$(13)\quad k\Psi\left(\frac{a_0-\mu}{\sqrt{(\tau+1)/\tau}}\right)-(k-1)G(a_0-\Psi^{-1}(\lambda)|a_0,\mu,\tau)$$
$$-\lambda(k-1)\Psi(\sqrt{\tau}(a_0-\Psi^{-1}(\lambda)-\mu))-k\lambda=0.$$

式 (b) も同様にして得られる．∎

Remark:

1. $k=1$ のとき．式 (a),(b) より，$\underline{\delta}=\overline{\delta}=\Psi(a_0-\mu/\sqrt{(\tau+1)/\tau})$ となり，これは θ の事前分布が $N(\mu,1/\tau)$ のときの $\delta(\theta)$ のベイズ推定値である．
2. $X=x$ が与えられた時の事後測度区間は $I(\tau\mu+x/\tau+1,\tau+1)$ となるので，そのときの $\delta(\theta)$ のベイズ推定区間は $\left[\underline{\delta}((\tau\mu+x)/(\tau+1),\tau+1),\overline{\delta}((\tau\mu+x)/(\tau+1),\tau+1)\right]$ となる．
3. $G(a_0-\Psi^{-1}(\lambda)|a_0,\mu,\tau)$ の数値は，2 次元正規分布の同時分布を用いて，数表や tetrachoric functions による方法や数値積分などによって計算される．

Proposition 1 の式 (a),(b) から得られる $\underline{\delta}, \overline{\delta}$ について, 次のような事前検出方法のルールを定義する. ただし, λ_0 は処理のための閾値確率として前もって決められているものとする.

事前検出方法$(0 < \lambda_0 < 1)$

$$
(14) \qquad \begin{cases} \underline{\delta}\left(\frac{\tau\mu+x}{\tau+1}, \tau+1\right) > \lambda_0 & \text{のとき, 処理をしない} \\ \underline{\delta}\left(\frac{\tau\mu+x}{\tau+1}, \tau+1\right) \leqq \lambda_0 < \overline{\delta}\left(\frac{\tau\mu+x}{\tau+1}, \tau+1\right) & \text{のとき, 部分事前検出} \\ \overline{\delta}\left(\frac{\tau\mu+x}{\tau+1}, \tau+1\right) \leqq \lambda_0 & \text{のとき, 事前検出} \end{cases}
$$

具体的には, 前もって許容できる適合の確率 λ_0 を決めておき, 観測値 $X = x$ から推定した適合の確率の下限値 $\underline{\delta}$ が λ_0 を上回っていれば処理をせず, 推定した適合の確率の上限値 $\overline{\delta}$ が λ_0 を下回っていれば観測値 $X = x$ が適合していたとしても, 以降は不適合になるとして事前検出とする. $\underline{\delta}$ と $\overline{\delta}$ の間に λ_0 がある場合には不適合品の発生が否定できない部分事前検出として扱う.

さらに, 上記の事前検出方法に対応する観測値 $X = x$ に関しての閾値 $\underline{\ell}, \overline{\ell}$ の存在を示そう. θ と λ についての関数 $\underline{h}, \overline{h}$ を次のように定義する.

$$
(15) \qquad \underline{h}(\theta, \lambda) := k(\delta(\theta) - \lambda)^+ + (\delta(\theta) - \lambda)^-,
$$

$$
(16) \qquad \overline{h}(\theta, \lambda) := (\delta(\theta) - \lambda)^+ + k(\delta(\theta) - \lambda)^-
$$

とする. また,

$$
(17) \qquad \underline{H}(\lambda|\mu, \tau) := \int_\Theta \underline{h}(\theta, \lambda) e^{-\frac{\tau(\theta-\mu)^2}{2}}\, d\theta,
$$

$$
(18) \qquad \overline{H}(\lambda|\mu, \tau) := \int_\Theta \overline{h}(\theta, \lambda) e^{-\frac{\tau(\theta-\mu)^2}{2}}\, d\theta
$$

とする. $\lambda = \underline{\delta}(\mu, \tau)$ は $\underline{H}(\lambda|\mu, \tau) = 0$ の解であり, $\lambda = \overline{\delta}(\mu, \tau)$ は $\overline{H}(\lambda|\mu, \tau) = 0$ の解として与えられる. ここで, $\delta(\theta) = P(X < a_0|\theta)$ は θ に関して減少関数であるから, $\underline{h}(\theta, \lambda), \overline{h}(\theta, \lambda)$ は θ, λ の 2 変数関数であるが, いずれか一方の変数 (θ or λ) を固定したときに他方の変数 (λ or θ) に関して減少関数となることは容易にわかる.

Lemma 1. $g(\theta)$ を θ に関する減少関数, $N(\theta|\mu, \tau) = e^{-\frac{\tau(\theta-\mu)^2}{2}}$ とする. このとき, $\mu < \mu'$ に対して,

$$
(19) \qquad \int_\Theta g(\theta) N(\theta|\mu, \tau)\, d\theta \geqq \int_\Theta g(\theta) N(\theta|\mu', \tau)\, d\theta
$$

が成り立つ.

Proof. $N(\theta|\mu, \tau) = e^{-\frac{\tau(\theta-\mu)^2}{2}} = e^{-\frac{\tau(\theta-(\mu-\mu')-\mu')^2}{2}} = N(\theta - (\mu - \mu')|\mu', \tau)$ と書ける. 従って, $\theta' = \theta - (\mu - \mu')$ とすれば,

$$
\begin{aligned}
\int_\Theta g(\theta) N(\theta|\mu, \tau)\, d\theta &= \int_\Theta g(\theta' + (\mu - \mu')) N(\theta'|\mu', \tau)\, d\theta' \\
&\geqq \int_\Theta g(\theta') N(\theta'|\mu', \tau)\, d\theta' \blacksquare
\end{aligned}
$$

上記のLemma 1より，$\mu < \mu'$ に対して $\underline{H}(\lambda|\mu,\tau) \geqq \underline{H}(\lambda|\mu',\tau)$, $\overline{H}(\lambda|\mu,\tau) \geqq \overline{H}(\lambda|\mu',\tau)$ であり，また，λ に関しても $\underline{H}(\cdot|\mu,\tau)$, $\overline{H}(\cdot|\mu,\tau)$ はそれぞれ減少関数である．ゆえに，$\underline{\delta}(\mu',\tau) \leqq \underline{\delta}(\mu,\tau)$, $\overline{\delta}(\mu',\tau) \leqq \overline{\delta}(\mu,\tau)$ がわかる．

Lemma 2. $\mu < \mu'$ に対して，

$$\underline{\delta}(\mu',\tau) \leqq \underline{\delta}(\mu,\tau), \quad \overline{\delta}(\mu',\tau) \leqq \overline{\delta}(\mu,\tau)$$

が成り立つ．

従って，事前検出方法のルール (式 (14)) に対して次が言える:

Proposition 2. $\underline{\ell} = \underline{\ell}(\lambda_0,\mu,\tau)$, $\overline{\ell} = \overline{\ell}(\lambda_0,\mu,\tau)$ が存在して，事前検出方法は次のように表される．観測値 $X = x$ に対して

$$\begin{cases} x < \underline{\ell} & \text{のとき，処理をしない} \\ \underline{\ell} \leqq x < \overline{\ell} & \text{のとき，部分事前検出} \\ x \geqq \overline{\ell} & \text{のとき，事前検出} \end{cases} \tag{20}$$

具体的には，$\underline{\delta}(\tau\mu+x/\tau+1, \tau+1) = \lambda_0$ となる x が $\underline{\ell}$ を表し，$\overline{\delta}(\tau\mu+x/\tau+1, \tau+1) = \lambda_0$ となる x が $\overline{\ell}$ を表す．

最後に，簡単な数値例を示すと，$a_0 = \frac{3}{4}, \mu = 0, \tau = 1, k = 2$ で $X = \frac{1}{2}$ を観測したとき，$I(\mu,\tau)$ は事後区間 $I(\frac{\tau\mu+x}{\tau+1}, \tau+1) = I(\frac{1}{4}, 2)$ となって，その時の $\delta(\theta)$ に関する $\underline{\lambda}, \overline{\lambda}$ の値は，それぞれ

$$\underline{\lambda} \cong 0.5943, \overline{\lambda} \cong 0.7182$$

となる．今の場合，我々の提案する区間ベイズ法による適合の確率の下限値は59.43%，上限値は71.82%と推定される．

References

[1] J. A. Bather. Control charts and minimization of costs. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B.* 25:49–80, 1963.

[2] Robert V. Baxley, Jr. An application of variable sampling interval control charts. *Journal of Quality Technology*, 27(4):275–282, 1995.

[3] Lorraine De Robertis and J. A. Hartigan. Bayesian inference using intervals of measures. *Ann. Statist.*, 9(2):235–244, 1981.

[4] M. A. Girshick and Herman Rubin. A Bayes approach to a quality control model. *Ann. Math. Statistics*, 23:114–125, 1952.

[5] E. L. Porteus and A. Angelus. Opportunities for improved statistical process control. *Management Sci.*, 43:1214–1228, 1997.

[6] Marion R. Reynolds, Jr., Jesse C. Arnold, Raid W. Amin, and Joel A. Nachlas. $\overline{X}$ charts with variable sampling intervals. *Technometrics*, 30(2):181–192, 1988.

[7] W.A. Schewhart. *Economic Control of Quality of Manufactured Product*. Van Nostrand, 1931. 白崎 文雄（訳),「工業製品の経済的品質管理」, 日本規格協会, 1951.

[8] George Tagaras. A dynamic programming approach to the economic design of X-charts. *IIE Trans.*, 26(3):48–56, 1994.

[9] George Tagaras. Dynamic control charts for finite production runs. *Europian J. Oper. Res.*, 91:38–55, 1998.

[10] George Tagaras and Yiannis Nikolaidis. Comparing the effectiveness of various Bayesian $\overline{X}$ control charts. *Oper. Res.*, 50(5):878–888, 2002.

[11] Howard M. Taylor. Markovian sequential replacement processes. *Ann. Math. Statist.*, 36:1677–1694, 1965.

[12] Howard M. Taylor. Statistical control of a Gaussian process. *Technometrics*, 9:29–41, 1967.

[13] Jiro Yamauchi. *Statictical table and formulas with computer applications JSA-1972*. Japanese Standerds Association, 1972.

[14] 伊喜 哲一郎, 堀口 正之, 安田 正實, 蔵野 正美. 不確実性の下でのマルコフ決定過程に対する区間ベイズ手法. **数理解析研究所講究録** *1636* **「不確実性と意思決定の数理」**, pages 1–8, 2009.

[15] 葛谷 和義. 活用多変量管理図－要求品質特性の工程管理－. In **第** *24* **回多変量解析シンポジウム**, pages 89–96. 日本科学技術連盟, 2001.

[16] 駒木 文保. ベイズ理論の現在. *2010* **年度統計関連学会連合大会チュートリアルセッション予稿集**, 2010.

[17] 佐々木 稔. **適応型の管理図とその品質マネジメントシステムへの応用に関する研究**. 放送大学大学院文化科学研究科修士論文, 2004.

[18] 佐々木稔, 堀口正之, 蔵野正美. 区間ベイズ推定による適応型品質管理. **数理解析研究所講究録** *1589* **「不確実な状況における意思決定の理論と応用」**, pages 120–129, 2008.

[19] 繁桝 算男. **ベイズ統計入門**. 東京大学出版会, 1985.

[20] 堀口 正之. 未知の推移確率行列の事前・事後区間表現とマルコフ決定過程について. **数理解析研究所講究録** *1682* **「不確実・不確定性下での意思決定過程」**, pages 70–77, 2010.

[21] 宮沢 光一. **情報・決定理論序説**. 岩波書店, 1971.

[22] 森口 繁一. **品質管理**. 岩波書店, 1979.

[23] 渡部 洋. **ベイズ統計学入門**. 福村出版, 1999.